CORRECTION

Cours Recherche — *Master Informatique Fondamentale*

Théorie des graphes - QCM de rentrée

Notations : Pour un graphe $G = (V, E)$ non orienté (resp. orienté) où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes (resp. arcs), on notera n son nombre de sommets et m son nombre d'arêtes (resp. d'arcs). Pour les questions algorithmiques, on suppose que les graphes sont donnés par leurs listes d'adjacence et le mot *complexité* désignera la complexité en temps dans le pire des cas.

Mode d'emploi : Pour chacune des questions, remplir la case vide ou bien entourer la (ou les) réponse(s) justes (il peut éventuellement y en avoir plusieurs ou aucune de juste).

	QUESTION	REPONSE
1	Ecrire la définition que $C \subseteq V$ est une *clique* de $G = (V, E)$	*pour tout x,y différents dans C, xy dans E*
2	Ecrire la définition que $S \subseteq V$ est un *ensemble indépendant* (ou *stable*) de $G = (V, E)$	*pour tout x,y dans S, xy pas dans E*
3	La proposition suivante est-elle vraie : *"si S est un ensemble indépendant de $G = (V, E)$, alors $V - S$ est une clique de G"* ?	OUI **NON**
4	Dans une classe de 9 élèves, chaque élève envoie des cartes de St Valentin à 2 autres élèves de son choix. Est-il possible que chaque élève recoive des cartes des 2 élèves à qui il a écrit ?	**OUI** NON
5	Même question en remplaçant 2 par 3 ?	OUI **NON**
6	Lesquels de ces graphes admettent un cycle eulérien ?	K_{2n}
7	Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe à n sommets sans sous-graphe induit isomorphe à •—•—• ?	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $n-1$ $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ **$\frac{n(n-1)}{2}$**
8	Tout arbre admet au moins un couplage parfait ?	OUI **NON**
9	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait détecter si un graphe non orienté est connexe ?	$\mathcal{O}(n)$ **$\mathcal{O}(n+m)$** $\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(n^3)$
10	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait détecter si un graphe orienté contient un circuit ?	$\mathcal{O}(n)$ **$\mathcal{O}(n+m)$** $\mathcal{O}(n^2)$ NP-complet
11	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait détecter si un graphe non orienté contient un cycle ?	**$\mathcal{O}(n)$** $\mathcal{O}(n+m)$ $\mathcal{O}(n^2)$ NP-complet
12	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait détecter si un graphe non orienté contient un cycle qui passe par tous les sommets une fois et une seule ?	$\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(n+m)$ $\mathcal{O}(n^2)$ **NP-complet**
13	Avec quelle complexité sait-on calculer un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe non orienté pondéré ?	$\mathcal{O}(m+n)$ **$\mathcal{O}((m+n)\log(n))$** **$\mathcal{O}(n^2)$**
14	Idem quand toutes les arêtes ont des poids égaux à 1 ?	**$\mathcal{O}(m+n)$** $\mathcal{O}((m+n)\log(n))$ $\mathcal{O}(n^2)$
15	Avec quelle complexité sait-on calculer les distances à partir d'une source dans un graphe orienté dont les arcs ont des poids positifs ?	$\mathcal{O}(m+n)$ **$\mathcal{O}((m+n)\log(n))$** **$\mathcal{O}(n^2)$**
16	Idem quand tous les arcs ont des poids égaux à 1 ?	**$\mathcal{O}(m+n)$** $\mathcal{O}((m+n)\log(n))$ $\mathcal{O}(n^2)$
17	Avec quelle complexité sait-on calculer les distances pour tous les couples de sommets dans un graphe orienté dont les arcs ont des poids positifs ?	$\mathcal{O}(m+n)$ **$\mathcal{O}(n^2\log(n)+mn)$** (*meilleur*) **$\mathcal{O}(n^3)$** (*classique*) $\mathcal{O}(n^4)$

	QUESTION	REPONSE
18	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait vérifier si un graphe est biparti ?	$\mathcal{O}(n+m)$ $\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(mn)$
19	Quelle est la complexité de vérifier si un graphe G contient une clique de taille k pour G et $k \geq 3$ quelconques ?	Polynomial NP-complet
20	Soit $k \geq 3$ fixé, quelle est la complexité de vérifier si un graphe G contient une clique de taille k pour G quelconque ?	Polynomial NP-complet
21	Quelle est la complexité de vérifier si un graphe G est k-colorable pour G et $k \geq 3$ quelconques ?	Polynomial NP-complet
22	Soit $k \geq 3$ fixé, quelle est la complexité de vérifier si un graphe G est k-colorable pour G quelconque ?	Polynomial NP-complet
23	Un mini-gala réunit 5 filles et 5 garçons. Sachant que chaque fille a déjà fait connaissance de exactement 3 des 5 garçons et chaque garçon a déjà fait connaissance de exactement 3 des 5 filles, est-il toujours possible de répartir les 10 en 5 couples (fille,garçon) disjoints tel que chaque couple réunit deux personnes se connaissant déjà ?	OUI NON
24	Etant donné trois maisons positionées dans le plan ainsi que trois sources (eau,électricité,gaz), peut-on relier chacune des maisons aux trois sources en dessinant des canalisations qui ne se coupent pas ?	OUI NON
25	Etant donné un ensemble de n individus où chacun a au plus 4 amis, est-il toujours possible de diviser cet ensemble en 5 groupes tel qu'il n'y ait pas deux amis au sein d'un même groupe ?	OUI NON
26	Même question si on veut diviser l'ensemble en 4 groupes ?	OUI NON
27	Soit S un ensemble de n individus tel que pour toute paire d'individus il y en a toujours un qui est strictement plus fort que l'autre. Un *Roi* est un individu x pour lequel il existe une partie $A \subseteq S - \{x\}$ (son *armée*) tel que x bat tous les individus de A, et tout autre individu est battu par un élément de A ou par x. Existe-t-il toujours un Roi dans S ?	OUI NON
28	Quel est le nombre maximum d'arêtes que peut contenir un graphe à 40 sommets qui n'a pas de clique de taille 5 ?	600
29	Soit G un graphe sans triangle, ni carré, de diamètre 2, non régulier et avec un sommet de degré 7. Combien y a-t-il de sommets dans G ?	8

Cadre pour des commentaires et/ou pour justifier vos réponses aux questions 27, 28 et 29.

